Leçon 214 - Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et géométrie.

1. Théorème d'inversion locale. —

Cadre : $n, p \in \mathbb{N}^*$. U, V ouverts de $\mathbb{R}^n$,$\mathbb{R}^p$. $f : U \to \mathbb{R}^p$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. *Enoncés et exemples.* —

- Théorème d'inversion locale : Soient E,F des espaces de Banach de dim finie, U un ouvert de E, et $f : U \to F$ de classe C^1. Si il existe $x \in U$ tel que $D_x(f)$ soit inversible, alors il existe un voisinage de x sur lequel f est une bijection, dont l'inverse est de classe C^1.
- Ex : $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^0 - \{(0, 0)\}$.
- Contre-ex : $f(x) = x + x^2 sin(\frac{\pi}{x})\chi_{\mathbb{R}^*}(x)$.
- Rem : On peut remplacer C^1 par C^k dans l'énoncé du théorème.
- Thm : Version holomorphe du th d'inversion locale : Pour $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe, si $f'(z) \neq 0$, alors on a un voisinage de z sur lequel f admet un inverse holomorphe.
- Théorème d'inversion globale : Si f est de classe C^1, injective, et de différentielle inversible en tout point de U, alors c'est un C^1-difféomorphisme sur son image.
- Ex : Dans le 1er exemple, le th d'inversion globale ne s'applique pas car f n'est pas injective.
- Thm : Version holomorphe du th d'inversion globale : Pour $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe, injective, si $f'(z) \neq 0$ pour tout z, alors f est un biholomorphisme sur son image.

2. *Applications en algèbre linéaire.* —

- Théorème de changement de coordonnées.
- Ex : Passage en coordonnées polaires.
- App : La racine k-ième d'une matrice.
- Pro : $exp : M_n(\mathbb{K}) \to Gl_n(\mathbb{K})$ est C^1 et $D_0(exp) = exp(0) = I_n$, donc exp est un C^1-difféom d'un voisinage de 0 dans $M_n(\mathbb{K})$ vers un voisinage de I_n dans $Gl_n(\mathbb{K})$.
- Rem : exp est un difféom local mais pas global.
- **Dev** : $exp : M_n(\mathbb{C}) \to Gl_n(\mathbb{C})$ est surjective. De plus, $exp(M_n(\mathbb{R})) = \{A^2, A \in Gl_n(\mathbb{R})\}$.
- $Gl_n(\mathbb{K})$ n'a pas de sous-groupes arbitrairement petits (inclus dans des boules de taille arbitrairement petites)
- Lemme de réduction des formes quadratiques.

3. *Applications en géométrie différentielle.* —

- Def : submersion, immersion. Avec les diagrammes en dessin.
- Existence d'un inverse à droite pour une immersion, d'un inverse à gauche pour une submersion.
- Théorème du rang constant.
- **Dev :** Lemme de Morse : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^3. Soit $x \in U$ tq $D_x(f) = 0$, et soit (p, q) la signature de la hessienne de f, $D^2_x(f)$. Alors il existe un voisinage V de x, W un voisinage de 0, et $g : V \to W$ un C^1-difféomorphisme tel que $\forall y \in W$, $f(g^{-1}(y)) = f(x)+y_1^2+\dots+y_p^2-(y_{p+1}^2+\dots+y_{p+q}^2)$.
- App : Equation de la tangente en un point double dans $\mathbb{R}^2$.
- App : Etude locale d'une surface par rapport à son plan tangent via une forme quadratique.

2. Théorème des fonctions implicites. —

1. *Enoncé et exemples.* —

- Théorème des fonctions implicites : Soient E,F,G des Banach de dim finie, U,V des ouverts de E,F et $f : U \times V \to G$ de classe C^1. S'il existe $(u_0, v_0) \in U \times V$ tels que $\partial_v D_{(u_0,v_0)}(f)$ soit inversible, alors il existe des voisinages U_1, V_1 de u,v et une fonction $g : U_1 \to V_1$ de classe C^1 telle que $\forall (u, v) \in U_1 \times V_1$, $f(u, v) = f(u_0, v_0) \Leftrightarrow v = g(u)$.
- Rem : Cela marche aussi si on remplace C^1 par C^k.
- Pro : Version holomorphe.
- Ex : Exemple du cercle. Les points où la pente est infinie posent problème, alors on préfère morceler le domaine en cartes et faire un reparamétrage sur chaque carte.
- Rem : Etude de la différentielle de g, retour sur l'exemple du cercle.
- La régularité de g est la même que celle de f. On peut ainsi avoir un DL de g.
- Rem : Le théorème des fonctions implicites et le théorème d'inversion locale sont équivalents.

2. *Quelques applications.* —

- App : Résolution approchée d'une équation. Méthode et exemples.
- Rem : Lien entre équation différentielle et fonctions implicites. Equation de Burgers avec méthode.
- App : La racine simple d'un polynôme dépend de façon C^∞ de ses coefficients.
- Rem : L'ensemble des polynômes scindés à racines simples est un ouvert. C'est $Disc^{-1}(\mathbb{K}^*)$.

3. *Théorème des extrema liés.* —

- Théorème des extrema liés.
- App : Démonstration de l'inégalité arithmético-géométrique.
- App : Emballage optimal d'une boîte.
- App : Application à la diagonalisation des endomorphismes symétriques.
- App : Inégalité de Hadamard.

3. Application aux sous-variétés. —

On se place désormais sur $\mathbb{R}^n$, avec $V \subset \mathbb{R}^n$.

1. *Définitions des sous-variétés.* —

- Def : Sous-variété
- Théorème des sous-variétés.

- Rem : On utilise le théorème des fonctions implicites et le théorème d'inversion locale dans la preuve. (Important de le préciser)
- Exemples correspondant aux équivalentes : sphère, tore, graphe d'une fonction continue (sin(x) par exemple)

2. Espace tangent. —

- Def : Vecteur tangent et espace tangent. Iterprétation comme le noyau de $D_a(g)$.
- Rem : Caractérisation de l'espace tangent selon la définition de sous-variété choisie.
- Interprétation géométrique du th des extrema liés.

3. Exemples de sous-variétés de $M_n(\mathbb{R})$. —

- Ex : Un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension n. Ainsi, $Gl_n(\mathbb{R})$ est de dimension n^2. De plus, son plan tangent est $M_n(\mathbb{R})$.
- Ex : L'ensemble des matrices de rang r est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ de dim $n^2 - (n-r)^2$.
- **Dev** : Théorème de Cartan-Von Neumann : Tout sous-groupe fermé de $Gl_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété.
- Ex : $O_n(\mathbb{R}) := Ker(M \mapsto M^t M - I_n)$ est une sous-variété de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ de $M_n(\mathbb{R})$.
- Ex : $Sl_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ de dim $n^2 - 1$.

Références

Rouvière : Th d'inversion locale, applications. Lemme de Morse.(Dev) Th des fonctions implicites, interprétation. Résolution approchée d'une équation, Burgers. Inégalité de Hadamard. Sous-variétés. Exemples de sous-variétés.
Objectif Agrégation : Racine k-ième d'une matrice. Avoir un DL de la fonction implicite, TIL et TFI équivalents. Régularité des racines simples d'un poly. Appli du th des extrema liés.
Lafontaine : Immersion,submersion. Sous-variétés, vecteurs tangents, espaces tangents.
Gourdon : Th des extrema liés.
Gonnord, Tosel : Théorème de Cartan-Von Neumann. (Dev)
Zavidovique : Surjectivité de l'exponentielle matricielle. (Dev)

May 18, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes